

Colle du 07/10 - Sujet 1
Bijection et trigonométrie

Question de cours.

1. Définir la négligeabilité entre deux fonctions.
2. Démontrer la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Exercice 1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x}{1 + |x|}.$$

1. Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
2. Montrer que f définit une bijection de $\mathbb{R}$ dans un ensemble que l'on précisera.
3. Déterminer une expression de f^{-1} analogue à celle de f .
4. Calculer de deux façons différentes la dérivée de f^{-1} .

Exercice 2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\sqrt{2} \sin(2x) \leq \sin(3x) + \sin(x)$.

Colle du 07/10 - Sujet 2
Bijection et trigonométrie

Question de cours.

1. Énoncer les limites remarquables du sinus et du cosinus.
2. Montrer que la fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ à l'aide de limites usuelles.

Exercice 1. Soit $\alpha \in [0; \pi[$ tel que $\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

1. Déterminer $\tan(\alpha)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \cos(x) + (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \sin(x) \leq 2$ en fonction de α .
3. Calculer $\cos(2\alpha)$ et en déduire α .

Exercice 2.

1. Montrer que la fonction sinus définit une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ dans un ensemble V que l'on déterminera. On note φ sa réciproque.
2. Déterminer le tableau de variation de φ et préciser $\varphi(0)$ et $\varphi(1)$, $\varphi\left(-\frac{1}{2}\right)$.
3. Déterminer le domaine de dérivabilité de φ et déterminer sa dérivée.

Colle du 07/10 - Sujet 3
Bijection et trigonométrie

Question de cours.

1. Donner les ensembles de dérivabilité et les dérivées des fonctions sinus, cosinus, tangente.
2. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \ln(x^2 - 1)$ définit une bijection de $]1; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ et préciser sa fonction réciproque.

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, $1 + \cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) \leq 0$.

Exercice 2. Pour tout $x \in]-1; 1[$, on pose $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$.

1. Montrer que f est une bijection de $] -1; 1[$ dans J un intervalle que l'on précisera.
2. Montrer que f^{-1} est dérivable sur J et que pour tout $x \in J$, $(f^{-1})'(x) = \frac{f^{-1}(x)}{x}$.
3. Déterminer f^{-1} .